BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 ***Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası*** **2009**

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХСЛОЙНОГО СТЕРЖНЯ С ИСКРИВЛЕННОЙ ВНУТРЕННЕЙ СТРУКТУРОЙ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВИДАХ ЗАКРЕПЛЕНИЙ

Л.Ф.ФАТУЛЛАЕВА

Институт Учителей Азербайджана

laura_fat@rambler.ru

В данной работе, в рамках линейной теории упругости, на основе модели кусочно-неоднородного трехслойного композита с искривленной внутренней структурой, исследована потеря несущей способности стержня с разными по толщине слоями из различных материалов. Принято, что слои стержня жестко сцеплены между собой, то есть выполняются условия контакта слоев без учета трения.

При постановке технических задач могут иметь место разнообразные виды закреплений, что приводит к необходимости формулировок различных краевых условий на торцах стержня.

В этой связи данная статья преследует цель выявить влияние краевых условий, соответствующих жесткому и комбинированному защемлениям на критическую силу устойчивости. Поставленные в работе задачи решаются вариационным методом смешанного типа в сочетании с методом Релея-Ритца.

1. Вариационная постановка задачи. Введем в рассмотрение прямоугольный в плане стержень длиной l и толщиной $2h$. Предположим, что он составлен из трех различных по толщине слоев, причем модули упругости крайних слоев одинаковы, т.е. $E_1 = E_3 = E$, а E_2 - модуль упругости среднего слоя. Толщину первого слоя обозначим через $\delta_1(x)$, а толщину искривленного волокна – через $\Delta = const$. Тогда, очевидно, что толщина правого крайнего слоя определяется следующим равенством:

$$\delta_2(x) = 2h - \Delta - \delta_1(x)\,. \tag{1.1}$$

Условия контакта между слоями пакета заключаются в их жестком сцеплении. Из этого следует равенства на них перемещений, напряжений и отсутствие взаимного давления слоев. В дальнейших рассуждениях будем использовать гипотезу плоских сечений Кирхгофа-Лява, при которой сформулированные выше условия выполняются автоматически. При сделанных предположениях стержень является монолитным и может рассматриваться как обычный. Зададим декартову систему координат с началом в точке $z = 0$ и направим ось x вдоль длины стержня. Тогда уравнение состояния для пакета в целом запишем в виде одного равенства:

$$e^{v} = \frac{\sigma}{E_{k+1}}, \qquad a_k \le z \le a_{k+1} \qquad (k = 0,1,2), \tag{1.2}$$

где σ - напряжение. В (1.2), для краткости записи, введены следующие обозначения

$$a_0 = -h, \quad a_1 = -h + \delta_1(x), \quad a_2 = -h + \delta_1(x) + \Delta\,, \quad a_3 = h\,.$$

Значение a_3 непосредственно следует из равенства (1.1).

Рассмотрим теперь устойчивость описанного выше стержня, центрально сжатого силой T. Решение соответствующей задачи осуществим посредством вариационного метода смешанного типа [1], в котором независимыми варьируемыми величинами являются скорости напряжений и перемещений:

$$R = -\int_0^l w_{,x}\dot{w}_{,x}dx + \int_0^l \dot{M}\dot{w}_{,xx}dx - \frac{T}{2}\int_0^l \dot{w}_{,x}^2 dx - \frac{1}{2}\int_0^l \sum_{k=0}^{2}\frac{1}{E_{k+1}}\int_{a_k}^{a_{k+1}}\dot{\sigma}^2 dxdz\,.$$

При использовании вариационного метода одним из центральных вопросов является выбор аппроксимирующей функции для закона распределения напряжений по толщине. Примем его линейным, т.е.

$$\sigma = -\frac{T}{2h} + \frac{3M}{2h^3}z \qquad \text{или} \qquad \dot{\sigma} = -\frac{1}{2h} + \frac{3z}{2h^3}\dot{M}\,. \tag{1.3}$$

Учитывая гипотезу плоских сечений, принимая, что ширина стержня равна единице и задаваясь нелинейностью только прогиба w, применяемый функционал запишем согласно [2], в форме:

$$\begin{gathered} R = -\int_0^l w_{,x}\dot{w}_{,x}dx + \int_0^l \dot{M}\dot{w}_{,xx}dx - \frac{T}{2}\int_0^l \dot{w}_{,x}^2 dx - \\ -\frac{1}{8h^2}\int_0^l \Phi_0 dx + \frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1\dot{M}dx - \frac{3}{8h^6}\int_0^l \Phi_2\dot{M}^2 dx, \end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$\Phi_0 = \frac{2h}{E} + \frac{\Delta}{E} + \frac{\Delta}{E_2},$$

$$\Phi_1 = -\frac{\Delta^2}{E_2} + \frac{2h\Delta}{E_2} - \frac{2\delta_1(x)\Delta}{E_2} + \frac{\Delta^2}{E} - \frac{2h\Delta}{E} + \frac{2\delta_1(x)\Delta}{E},$$

$$\begin{gathered} \Phi_2 = \frac{3h^2\Delta}{E_2} - \frac{6h\delta_1(x)\Delta}{E_2} + \frac{3\delta_1^2(x)\Delta}{E_2} - \frac{3h\Delta^2}{E_2} + \frac{3\delta_1(x)\Delta^2}{E_2} + \frac{\Delta^3}{E_2} + \frac{2h^3}{E} - \\ -\frac{3h^2\Delta}{E} + \frac{6h\delta_1(x)\Delta}{E} - \frac{3\delta_1^2(x)\Delta}{E} + \frac{3h\Delta^2}{E} - \frac{3\delta_1(x)\Delta^2}{E} - \frac{\Delta^3}{E}. \end{gathered}$$

Здесь M - момент, а запятая означает частное дифференцирование по координате x. Под точкой следуя [1], понимается дифференцирование по T, т.е. $\dot{T} = 1$. Отметим, что вариационный подход для решения рассматриваемой задачи имеет то преимущество, что позволяет обойти математические трудности, возникающие при использовании классических методов математической физики.

Для завершения математической постановки задачи необходимо записать краевые условия. В случае жесткого защемления обоих концов имеем:

$$w(0)=w(l)=0;\quad w_{,x}(0)=w_{,x}(l)=0;$$
$$M(0)\neq 0;\quad M(l)\neq 0. \tag{1.5}$$

Далее, не умоляя общности, положим, что при $x=l$ стержень жестко защемлен, а при $x=0$ осуществляется шарнирное опирание. Тогда соответствующие краевые условия примут вид:

$$w(l)=0;\quad w_{,x}(l)=0;\quad M(l)\neq 0;$$
$$w(0)=0;\quad M(0)=0. \tag{1.6}$$

2. Случай жесткого защемления обоих концов. Поясним идею анализа устойчивости многослойного линейно упругого стержня, когда оба конца жестко защемлены. Тогда в соответствии с методом Релея-Ритца необходимо задать формы изгиба и момента. В качестве первых собственных функций, удовлетворяющих краевым условиям (1.5), имеем: [1]

$$w(x,t)=a(t)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\pi\left(1-\frac{x}{l}\right),$$
$$M(x,t)=m(t)\cos\frac{\pi x}{l}\cos\pi\left(1-\frac{x}{l}\right), \tag{2.1}$$

или после дифференцирования по t

$$\dot w=\dot a\sin\frac{\pi x}{l}\sin\pi\left(1-\frac{x}{l}\right),$$
$$\dot M=\dot m\cos\frac{\pi x}{l}\cos\pi\left(1-\frac{x}{l}\right), \tag{2.2}$$

где $\dot a$ и $\dot b$ - независимые варьируемые функциональные аргументы.

Подставляя (1.3) и (2.1)-(2.2) в выражение функционала (1.4), после интегрирования получим аналитическое представление функционала

$$R=-\frac{\pi^2}{2l}a\dot a-\frac{\pi^2}{2l}\dot a\dot m-\frac{\pi^2 T}{4l}\dot a^2-\frac{1}{8h^2}\int_0^l\Phi_0dx+$$
$$+\frac{3}{8h^4}\dot m\int_0^l\Phi_1K(x)dx-\frac{3}{8h^6}\dot m^2\int_0^l\Phi_2K^2(x)dx,$$

в котором

$$K(x)=\cos\frac{\pi x}{l}\cos\pi\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

Равенства нулю

$$\frac{\partial R}{\partial\dot a}=0\quad\text{и}\quad\frac{\partial R}{\partial\dot m}=0$$

приводят к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot m=-a-T\dot a\quad\text{или}\quad m=-aT$$

$$-\frac{\pi^2}{2l}\dot{a}+\frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1 K(x)dx-\frac{3}{4h^6}\dot{m}\int_0^l \Phi_2 K^2(x)dx=0.$$

Путем подстановки, полученную систему удается свести к одному уравнению

$$\frac{dT}{da}=\left[-\frac{\pi^2}{2l}+\frac{3}{4h^6}T\int_0^l \Phi_2 K^2(x)dx\right]\times$$
$$\times\left[-\frac{3}{8h^4}\int_0^l \Phi_1 K(x)dx-\frac{3}{4h^6}a\int_0^l \Phi_2 K^2(x)dx\right]^{-1}. \quad (2.3)$$

Введя следующие безразмерные величины

$$\tau=\frac{T}{Eh},\quad y=\frac{a}{h},\quad \xi=\frac{h}{l},\quad \beta_1(x)=\frac{\delta_1(x)}{\Delta},\quad \beta_2(x)=\frac{\delta_2(x)}{\Delta}$$
$$\varphi_1=\frac{3}{8}\frac{EF_1}{h^3},\quad \varphi_2=\frac{3}{4}\frac{EF_2}{h^4},\quad \alpha=\frac{E}{E_2},$$

в которых, в свою очередь,

$$F_1=\int_0^l \Phi_1 K(x)dx=\frac{4h^2}{E}\int_0^l \frac{-\beta_1(x)+\beta_2(x)+\alpha\beta_1(x)-\alpha\beta_2(x)}{(1+\beta_1(x)+\beta_2(x))^2}K(x)dx,$$

$$F_2=\int_0^l \Phi_2 K^2(x)dx=\frac{8h^3}{E}\int_0^l\left[\frac{1}{4}\beta_1^3(x)+\frac{1}{4}\beta_2^3(x)+\frac{3}{4}\beta_1(x)+\frac{3}{4}\beta_2(x)+3\beta_1(x)\beta_2(x)+\right.$$
$$\left.+\frac{3}{4}\beta_1(x)\beta_2^2(x)+\frac{3}{4}\beta_1^2(x)\beta_2(x)+\frac{1}{4}\alpha+\frac{3}{4}\beta_1^2(x)\alpha+\frac{3}{4}\beta_2^2(x)\alpha-\frac{3}{2}\beta_1(x)\beta_2(x)\alpha\right]\times$$
$$\times\left[1+\beta_1(x)+\beta_2(x)\right]^{-3}\cdot K^2(x)dx,$$

(2.3) можно переписать в виде

$$\frac{d\tau}{dy}=\frac{-\frac{\pi^2}{2}\xi+\varphi_2\tau}{\varphi_1-\varphi_2 y}. \quad (2.4)$$

В уравнении (2.4) переход к безразмерному дифференцированию осуществлялся по правилу

$$\frac{d}{dT}=\frac{1}{hE}\frac{d}{d\tau}.$$

Из (2.4) величина критической силы устойчивости, определяемая из условия $d\tau/dy=0$, запишется посредством формулы

$$\tau_{кр}=\frac{\pi^2}{2}\xi\varphi_2^{-1}. \quad (2.5)$$

3. Случай комбинированного защемления. Пусть теперь осуществляется случай комбинированного защемления. Тогда, следуя [3], аппроксимирующие функции для прогиба w и момента M, удовлетворяющие соответствующим граничным условиям (1.6), представим следующим образом:

$$w(x,t)=a(t)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right),$$

$$M(x,t)=b(t)\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{x}{l}\right).$$

В результате процедуры, выполненной аналогично предыдущей, получим:

$$\tau_{кр}=\frac{\pi^2}{4}\xi\varphi_2^{-1},$$

где, в этом случае

$$\varphi_2=\frac{15}{16}\frac{EF_2}{h^4}\ .$$

4. Численный пример. Для дальнейших целей необходимо конкретизировать функцию $\delta_1(x)$. Примем её в виде [2]

$$\delta_1(x)=\delta_{10}+\delta_{11}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

тогда

$$\beta_1(x)=\frac{\delta_{10}}{\Delta}+\frac{\delta_{11}}{\Delta}\sin\frac{k\pi x}{l},$$

а

$$\beta_2(x)=\frac{2h}{\Delta}-\frac{\delta_{10}}{\Delta}-\frac{\delta_{11}}{\Delta}\sin\frac{k\pi x}{l}-1,$$

где k - параметр искривления, характеризующий форму волокна, а $\frac{\delta_{11}}{\Delta}$ - её безразмерная амплитуда.

На таблицах 1, 2, 3, согласно формуле (2.13), представлены результаты вычислений критической силы устойчивости при различных геометрических и физических параметрах и закреплений стержня для $\xi=10^{-1}$.

Таблица 1

k	$\tau_{кр}$ (жест. защ.)	$\tau_{кр}$ (комб.защ.)
0,25	0,09346	0,05510
0,45	0,09365	0,05527
0,65	0,09369	0,05530

Таблица 2

δ_{11}/Δ	$\tau_{кр}$ (жест. защ.)	$\tau_{кр}$ (комб.защ.)
0	0,09311	0,05477
0,02	0,09317	0,05481
0,04	0,09323	0,05486
0,06	0,09330	0,05491
0,08	0,09336	0,05495
0,1	0,09343	0,05500

Таблица 3

α	$\tau_{кр}$ (жест. защ.)	$\tau_{кр}$ (комб.защ.)
0,01	0,09343	0,05500
0,11	0,09282	0,05464
0,21	0,09222	0,05428
0,31	0,09162	0,05392
0,41	0,09103	0,05357
0,51	0,09045	0,05323

При этом фигурируемые в выражении φ_2 интегралы вычислялись либо аналитически, либо численно методом прямоугольников.

Наконец, отсюда, для однородного стержня, когда $\alpha = 1$, автоматически получаем численное значение критической силы Эйлера $\tau_{кр} \approx 0{,}088$ при жесткого защемлении и $\tau_{кр} \approx 0{,}052$ при комбинированного защемлении.

Важно заметить, что указанный выбор параметра искривления k обусловлен возможностью использования одномерной теории, а величина α может принимать значения разных порядков, что следует из анализа опытных данных для таких широко встречающихся на практике материалов как алюминий, вольфрам, стали, конструкционные пластики и композиты.

Таким образом, при выбранных значениях параметров можно сделать следующие выводы:

- критическая сила, как и следовало ожидать, при жестком опирании больше, чем при шарнирном и комбинированном защемлений, т.е.

$$\tau_{кр\,(ж.з)} > \tau_{кр\,(ш.з)} > \tau_{кр\,(к.з)}$$

(случай, когда торцы стержня закреплены шарнирно, исследован в работе [2]);

- при фиксированных k и α увеличение амплитуды искривления δ_{11}/Δ увеличивает значение $\tau_{кр}$;
- при заданных δ_{11}/Δ и α увеличение параметра k приводит к увеличению критической силы $\tau_{кр}$;
- при заданных k и δ_{11}/Δ наблюдается снижение значения $\tau_{кр}$ при возрастании α, что вполне объяснимо фиксированностью величины E, ибо рост α связан с уменьшением модуля упругости искривленного слоя E_2, которое приводит к снижению общей жесткости стержня, что представляется не рациональным с точки зрения устойчивости, т.к. уже при $\alpha = 5 \cdot 10^{-1}$ значение $\tau_{кр}$ меньше силы Эйлера.

В заключение отметим, что достоверность полученных результатов обеспечивается корректностью постановки задачи, применением обоснованных математических методов, сравнением, в частных случаях, с известными решениями и физически обоснованными выводами.

Автор приносит глубокую признательность профессору Р.Ю.Амензаде за постоянное внимание и помощи к статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Амензаде Р. Ю., Киясбейли Э. Т., Фатуллаева Л.Ф. Предельное состояние жестко защемленного нелинейно-упругого многослойного стержня // Механика композитных материалов, 2006, № 3, с. 347-360.
2. Амензаде Р.Ю., Ахундов М.Б., Фатуллаева Л.Ф. Устойчивость трехслойного упругого стержня с искривленной внутренней структурой // Вестник ЧГПУ им. И.Я.Яковлева. Серия «Механика предельного состояния», Чебоксары, 2007, № 3, с. 11-18.
3. Абдуллаев Ф.А., Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. Устойчивость многослойных стержней при различных видах закреплений // Вестник БГУ, 2001, № 1, с.131-141.
4. Амензаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. О точности линейного распределения напряжения в задачах выпучивания многослойных стержней // ДАН Азербайджана, 2000, № 4-6, с.72-77.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.

DAXİLDƏN ƏYİLMİŞ QURULUŞA MALİK ÜÇLAYLI ÇUBUĞUN MÜXTƏLİF ŞƏKİLLİ BAĞLANMASI ZAMANI DAYANIQLIĞI

L.F.FƏTULLAYEVA

XÜLASƏ

Baxılan işdə, xətti elastiкliк nəzəriyyəsi çərçivəsində, daxildən əyilmiş quruluşa maliк hissə-hissə qeyri-bircins üçlaylı кompozitin modeli əsasında layları müxtəlif qalınlıqlı və müxtəlif materiallardan hazırlanmış çubuğun əsas xassələrinin itirilməsi məsələsi araşdırılır. Qəbul olunur кi, çubuğun layları öz aralarında bərк pərçimlənmişdir, yəni sürtünmə nəzərə alınmadan layların əlaqə şərti yerinə yetirilir.

Texniкi məsələlərin qoyuluşu zamanı müxtəlif şəкilli bağlanmalar mümкündür, bu isə çubuğun uclarında müxtəlif sərhəd şərtlərinin verilməsini zəruri edir.

Bununla əlaqədar olaraq baxılan məqalədə bərк və кombinasiyalı bağlanmaya uyğun sərhəd şərtlərinin dayanıqlığın böhran qüvvəsinə təsiri öyrənilir. Bu işdə qoyulmuş məsələlər Rele-Rits üsulu ilə birliкdə qarışıq tipli variasiya üsulu ilə həll olunur.

STABILITY OF THE THREE-LAYER CORE WITH THE CURVED INTERNAL STRUCTURE AT VARIOUS KINDS OF FASTENINGS

L.F.FATULLAYEVA

SUMMARY

The presented paper deals with the loss of the bearing ability of a core with different layers on thickness and of various materials on the basis of the part-non-uniform three-layer composite model with the curved internal structure, within the framework of the linear theory of elasticity. It is accepted, that the layers of a core are rigidly tied, that is, the condition of the contact of layers without taking the friction into account.

At the statement of technical problems various kinds of fastenings that result in the necessity of formulations of various regional conditions of a core can take place.

In connection with this, the presented article pursues the purpose to reveal the influence of the regional conditions corresponding to the rigid and combined jamming on the critical force of stability. The problems are solved by variational method of the mixed type in combination to Rayleigh-Ritz method.